Fen-Edebiyat Fakültesi	ARASINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz III	
İmza:	Sınav Tarihi: 30 Ekim 2017	

Her soru eşit değerdedir. Yalnızca 4 soruyu cevaplayınız. Süre 90dk.

1. Her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{nx+\sin(nx^2)}{n}dx$
olarak tanımlansın. $\lim_{n\to\infty} a_n$ limitinin tanımlı olduğunu gösterin ve limiti bulun.

Çözüm: $f_n(x)=\frac{nx+\sin(nx^2)}{n}=x+\frac{\sin(nx^2)}{n}$ olsun. Her $x\in\mathbb{R}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$0\le\left|\frac{\sin(nx^2)}{n}\right|\le\frac{1}{n}$$

olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx^2)}{n}=0$ ve $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x=f(x)$ olur. Bu yakınsamanın düzgün olduğunu görelim.

$$\left\|f_n-f\right\|_{[0,1]}=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{\sin(nx^2)}{n}\right|\le\frac{1}{n}$$

olur. Bu da $\lim_{n\to\infty}\left\|f_n-f\right\|_{[0,1]}=0$ anlamına gelir. Yakınsama düzgün olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

2. $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}$, $f_n:A\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, her $x\in A$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\left\|f_n\right\|_A\le 1+\frac{1}{n}$ olsun. $\{f_n\}$ dizisi A üzerinde bir $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. $\sup_{x\in A}\left|f(x)\right|\le 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm: Her $x\in A$ için,

$$\left|f(x)\right|=\left|f(x)-f_n(x)+f_n(x)\right|\le\left|f(x)-f_n(x)\right|+\left|f_n(x)\right|\le\left\|f-f_n\right\|_A+\left\|f_n\right\|_A\le\left\|f-f_n\right\|_A+1+\frac{1}{n}$$

Düzgün yakınsama gereği $\lim_{n\to\infty}\left\|f-f_n\right\|_A=0$ olduğunu biliyoruz.

$$\left|f(x)\right|\le\left\|f-f_n\right\|_A+1+\frac{1}{n},\quad\forall x\in A$$

eşitsizliğinde iki tarafında $n\to\infty$ limitini alırsak her $x\in A$ için $\left|f(x)\right|\le 1$ buluruz. Bu da $\sup_{x\in A}\left|f(x)\right|\le 1$ anlamına gelir.

3. $h_n(x)=\sin n\pi x$ dizisinin $x=2/5$ için ıraksadığını ispatlayın.

Çözüm: Bakınız ders notları sayfa 16.

4. $g_n(x)=n^a x^n(1-x)^2$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$, $a\in\mathbb{R}$ olsun. Her $a\ge 2$ için bu dizinin noktasal limitini bulun ve $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösterin.

Çözüm: Her $a > 0$ ve $x \in [0,1)$ için $n^a x^n \to 0$ olduğunu biliyoruz. (bkz. ders notları sayfa 7). Ayrıca $g_n(1) = 0$ olduğundan, her $x \in [0,1]$ ve her $a \geq 2$ için $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = 0$ olur.

$g_n'(x) = n^a x^{n-1}(1-x)\,(n(1-x)-2x) = 0$ denklemi $x = \frac{n}{n+2}$ verir.
Birinci türev testine göre $\|g_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |g_n| = g_n(\frac{n}{n+2})$ olur.

$$g_n\left(\frac{n}{n+2}\right) = n^a \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\left(\frac{2}{n+2}\right)^2$$

$a = 2$ için $g_n\left(\frac{n}{n+2}\right) \to \frac{4}{e^2}$, $a > 2$ için $g_n\left(\frac{n}{n+2}\right) \to \infty$ olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n\| \neq 0$$

olduğundan yakınsama düzgün olamaz.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde türetilebilir olduğunu gösterin ve türevini bulun.

Çözüm: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ olsun.

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^3}$$

olduğundan ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ p=3 yakınsak serisi olduğundan Weierstrass-M testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır. $f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ ve

$$\|f_n'\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$$

olduğundan ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass-M testi yüzünden türev serisi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ düzgün yakınsaktır. Fonksiyon serilerinin türetilebilmesi ile ilgili teorem gereği, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde türetilebilirdir ve türevi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ olur.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2 x}$ serisinin $(0,\infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösterin.

Çözüm: $a > 0$ olsun. Serinin $[a,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsadığını gösterelim. $f_n(x) = ne^{-n^2 x}$ fonksiyonu x'in azalan bir fonksiyonu olduğundan

$$\|f_n\|_{[a,\infty)} = \frac{n}{e^{an^2}}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-an^2}$ serisinin yakınsak olduğunu görmenin bir çok yolu vardır. Biz kök testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n}{e^{an^2}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e^{an}} = 0$$

olur. Zira $\sqrt[n]{n} \to 1$ ve $e^{an} \to \infty$ olur. Kök testi bize $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-an^2}$ serisinin yakınsak olduğunu söyler. Weierstrass-M testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2 x}$ serisi $[a,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olur. f_n'ler her yerde sürekli olduğundan ve seri de $[a,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan, seri $[a,\infty)$ üzerinde sürekli olur. Bu her $a > 0$ için geçerli olduğundan, seri her $x > 0$ için sürekli olur.